安島直円の『環円無有奇術』より (数学史の研究)

藤井, 康生

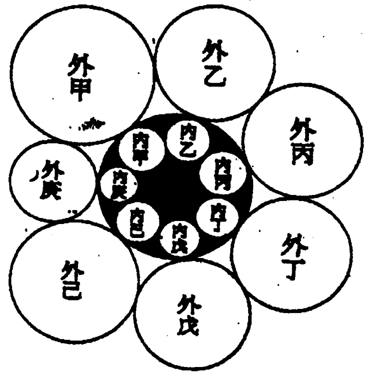
数理解析研究所講究録
第 1583 巻 2008 年 51-64

安島直円の『環円無有奇術』より

宝塚東高等学校　藤井康生 (Yasuo Fujii)
Takarazuka Higashi High School

1　はじめに

安島直円は『環円無有奇術』(天明 2 年 (1782)) の中で一つの円にいくつかの円が環状に外接している時，原円と甲円の直径および原円と甲円の接点と原円と乙円との接点間の距離，角の長さから乙円の直径を求めている．次に同様にして接点間の距離，亢，氐，... が与えられたときに，丙円，丁円 ... の直径を求めている．その後円の数を 3 個より順に増やしていき各場合について，原円，甲円，角，亢，... の関係を求めている．この関係を環円矩合と呼んでいるが円の数が奇数，偶数により違いがあり興味深いものである．次に安島は接点間の距離，角，亢，... の代わりに，角，亢，... を弦とし角，亢，... の両端で原円の半径に接する子円，丑円，... を考えている，このとき原円は子円，丑円，... の中心を結んでできる多角形の内接円（懐円）になる，子円，丑円 ... の半径は，各頂点から内接円の接点までの距離であるので，子円，丑円，... の直径により内接円である原円の直径は求められる．この関係を懐円矩合と呼んでいる．これは奇数多角形の場合に有馬頼徸『拾璣算法』において載せられているものである．これらの結果，安島の得た結論は原円の直径の他例えば，3 個の円の場合には子，丑円の直径を任意に与えれば寅円の直径と甲円の直径が決まり，4 個の場合には子，丑円の直径を任意に与えれば寅，卯円の直径が決まる．偶数個とき甲円の直径は任意にでき，乙円，丙円，... は順次求められる事である．最後に外接と内接を逆にして，甲円，乙円，... が原円に内接する場合を述べている．本稿では安島直円『環円無有奇術』について，本文の順序にしたがって概説していく．



2　第一解，外環円起術

原円，甲円の直径，角斜が与えられたとき乙円の直径を求める。

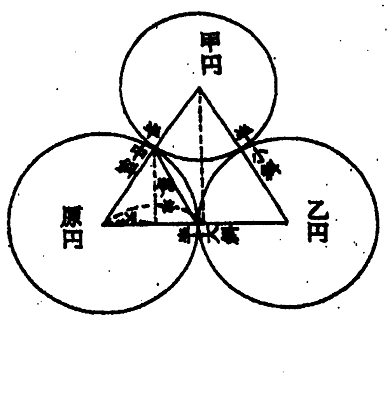
大斜 = 乙 + 原　中斜 = 甲 + 原　小斜 = 甲 + 乙

大斜^2 + 中斜^2 − 小斜^2 = 2 乙 × 原 + 2 原^2 + 2 甲 × 原 − 2 甲 × 乙

= 4 大斜 × 地

原を掛ける

乙 × 原^2 + 原^3 + 甲 × 原^2 − 甲 × 乙 × 原



$$=2\,\text{大斜}\times\text{地}\times\text{原}=2\,\text{大斜}\times\text{中斜}\times\text{天}=\text{寄位}$$

$$\text{原}^2-2\,\text{角}^2=2\,\text{原}\times\text{天}$$

大斜, 中斜を掛ける

$$\text{原}^4+\text{原}^3\times\text{甲}+\text{原}^3\times\text{乙}+\text{原}^2\times\text{甲}\times\text{乙}-2\,\text{原}^2\times\text{角}^2-2\,\text{原}\times\text{甲}\times\text{角}^2$$

$$-2\,\text{原}\times\text{乙}\times\text{角}^2-2\,\text{角}^2\times\text{甲}\times\text{乙}=2\,\text{大斜}\times\text{中斜}\times\text{原}\times\text{天}$$

寄位に原を掛ける

$$\text{原}^4+\text{原}^3\times\text{甲}+\text{原}^3\times\text{乙}-\text{原}^2\times\text{甲}\times\text{乙}=2\,\text{大斜}\times\text{中斜}\times\text{原}\times\text{天}$$

寄左から上式を引く

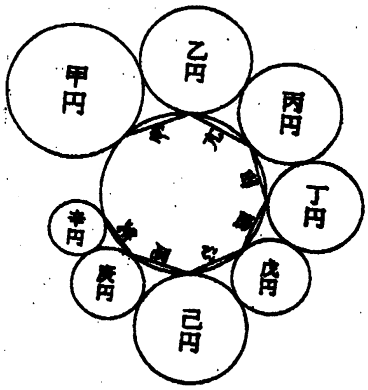
$$\text{原}^2\times\text{甲}\times\text{乙}-\text{原}^2\times\text{角}^2-\text{原}\times\text{甲}\times\text{角}^2-\text{原}\times\text{乙}\times\text{角}^2-\text{甲}\times\text{乙}\times\text{角}^2=0$$

乙円の直径を得る式

$$-\text{原}^2\times\text{角}^2-\text{原}\times\text{甲}\times\text{角}^2+(-\text{原}\times\text{角}^2-\text{甲}\times\text{角}^2+\text{原}^2\times\text{甲})\,\text{乙}=0$$

3 第二解

原円の直径と角斜，亢斜，氐斜，$\cdots$が与えられたとき，乙円，丙円以下の円の直径を求める．第一解より乙円の直径を得る式



$$-\text{原}^2\times\text{角}^2-\text{原}\times\text{甲}\times\text{角}^2+(-\text{原}\times\text{角}^2-\text{甲}\times\text{角}^2+\text{原}^2\times\text{甲})\,\text{乙}=0$$

本文では未知数乙を，乙＋原 に変えている．以下同様に計算している．

$$-\text{原}^3\times\text{甲}+(-\text{原}\times\text{角}^2-\text{甲}\times\text{角}^2+\text{原}^2\times\text{甲})(\text{乙}+\text{原})=0 \qquad \text{基式}$$

乙の直径を求める式の中で，角を亢に，甲を丙に変える．

$$-\text{原}^2\times\text{亢}^2-\text{原}\times\text{丙}\times\text{亢}^2+(-\text{原}\times\text{亢}^2-\text{丙}\times\text{亢}^2+\text{原}^2\times\text{丙})\,\text{乙}=0$$

$$-\text{原}^3\times\text{丙}+(-\text{原}\times\text{亢}^2-\text{丙}\times\text{亢}^2+\text{原}^2\times\text{丙})(\text{乙}+\text{原})=0$$

基式と維乗する (乙＋原 を消去する)．

$$-\text{原}\times\text{甲}\times\text{亢}^2-\text{甲}\times\text{丙}\times\text{亢}^2+\text{原}\times\text{丙}\times\text{角}^2+\text{甲}\times\text{丙}\times\text{角}^2=0$$

丙円の直径を得る式

$$-\text{原}\times\text{甲}\times\text{亢}^2+(-\text{甲}\times\text{亢}^2+\text{原}\times\text{角}^2+\text{甲}\times\text{角}^2)\,\text{丙}=0$$

角を氐に，甲を丁に変える．乙円の直径を得る式を得る．

$$-\text{原}\times\text{丁}\times\text{亢}^2+(-\text{丁}\times\text{亢}^2+\text{原}\times\text{氐}^2+\text{丁}\times\text{氐}^2)\;\text{乙}=0$$

$$-原^2 \times 氏^2 - 原 \times 丁 \times 氏^2 + (-丁 \times 亢^2 + 原 \times 氏^2 + 丁 \times 氏^2)(乙 + 原) = 0$$

基式と維乗する.

$$-原^2 \times 角^2 \times 氏 - 原 \times 甲 \times 角^2 \times 氏^2 - 原 \times 丁 \times 角^2 \times 氏^2 - 甲 \times 丁 \times 角^2 \times 氏^2$$

$$+原^2 \times 甲 \times 丁 \times 亢^2 = 0$$

丁円の直径を得る式

$$原^2 \times 角^2 \times 氏^2 - 原 \times 甲 \times 角^2 \times 氏^2 + (原 \times 角^2 \times 氏^2 - 甲 \times 角^2 \times 氏^2 + 原^2 \times 甲 \times 亢^2)\ 丁 = 0$$

丁円の直径を得る式において，角を房に，亢を氐に，甲を戊に変え，乙円の直径を得る式を得る.

$$-原^2 \times 房^2 \times 亢^2 - 原 \times 戊 \times 房^2 \times 亢^2 + (-原 \times 房^2 \times 亢^2 - 戊 \times 房^2 \times 亢^2 + 原^2 \times 戊 \times 氏^2)\ 乙 = 0$$

$$-原^3 \times 戊 \times 氏^2 + (-原 \times 房^2 \times 亢^2 - 戊 \times 房^2 \times 亢^2 + 原^2 \times 戊 \times 氏^2)(乙 + 原) = 0$$

基式と維乗する.

$$-原 \times 甲 \times 房^2 \times 亢^2 - 甲 \times 戊 \times 房^2 \times 亢^2 + 原 \times 戊 \times 角^2 \times 氏^2 + 甲 \times 戊 \times 角^2 \times 氏^2 = 0$$

戊円の直径を得る式

$$-原 \times 甲 \times 房^2 \times 亢^2 + (-甲 \times 房^2 \times 亢^2 + 原 \times 角^2 \times 氏^2 + 甲 \times 角^2 \times 氏^2)\ 戊 = 0$$

戊円の直径を得る式で角を心，亢を房，房を亢，甲を己に変え，乙円の直径を得る式を得る.

$$-原 \times 己 \times 房^2 \times 亢^2 + (-己 \times 房^2 \times 亢^2 + 原 \times 心^2 \times 氏^2 + 己 \times 心^2 \times 氏^2)\ 乙 = 0$$

$$-原^2 \times 氏^2 \times 心^2 - 原 \times 己 \times 氏^2 \times 心^2 + (-己 \times 亢^2 \times 房^2 + 原 \times 氏^2 \times 心^2 + 己 \times 氏^2 \times 心^2)(乙 + 原) = 0$$

基式と維乗する.

$$-原^2 \times 角^2 \times 氏^2 \times 心^2 - 原 \times 甲 \times 角^2 \times 氏^2 \times 心^2 - 原 \times 己 \times 角^2 \times 氏^2 \times 心^2$$

$$-甲 \times 己 \times 角^2 \times 氏^2 \times 心^2 + 原^2 \times 甲 \times 己 \times 亢^2 \times 房^2 = 0$$

己円の直径を得る式

$$-原^2 \times 角^2 \times 氏^2 \times 心^2 - 原 \times 甲 \times 角^2 \times 氏^2 \times 心^2$$

$$+(-原 \times 角^2 \times 氏^2 \times 心^2 - 甲 \times 角^2 \times 氏^2 \times 心^2 + 原^2 \times 甲 \times 亢^2 \times 房^2)\ 己 = 0$$

乙円の直径を得る式

$$-(原 + 甲)\ 原 \times 角^2 + \{-(原 + 甲)\ 角^2 + 原^2 \times 甲\}\ 乙 = 0$$

丙円の直径を得る式

$$-原 \times 甲 \times 亢^2 + \{(原 + 甲)\ 角^2 - 甲 \times 亢^2\}\ 丙 = 0$$

丁円の直径を得る式

$$-(原+甲)原\times角^2\times氏^2+\{-(原+甲)角^2\times氏^2+原^2\times甲\times亢^2\}丁=0$$

戊円の直径を得る式

$$-原\times甲\times亢^2\times房^2+\{(原+甲)角^2\times氏^2-甲\times亢^2\times房^2\}戊=0$$

己円の直径を得る式

$$-(原+甲)原\times角^2\times氏^2\times心^2+\{-(原+甲)角^2\times氏^2\times心^2+原^2\times甲\times亢^2\times房^2\}己=0$$

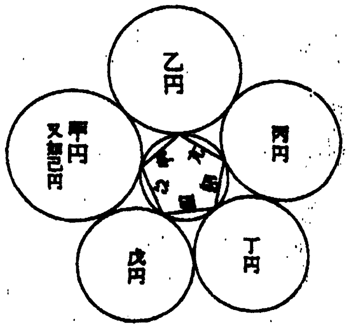
庚円の直径を得る式

$$-原\times甲\times亢^2\times房^2\times尾^2+\{(原+甲)角^2\times氏^2\times心^2-甲\times亢^2\times房^2\times尾^2\}庚=0$$

辛円の直径を得る式

$$-(原+甲)原\times角^2\times氏^2\times心^2\times箕^2$$
$$+\{-(原+甲)角^2\times氏^2\times心^2\times箕^2+原^2\times甲\times亢^2\times房^2\times尾^2\}辛=0$$

環円矩合　環円が３個のとき，甲=丁とする．



環三円矩合　$-(原+甲)^2角^2\times氏^2+原^2\times甲^2\times亢^2=0$

環円が４個のとき，甲=戊とする．

環四円矩合　$-亢^2\times房^2+角^2\times氏^2=0$

環円が５個のとき，甲=己とする．

環五円矩合　$-(原+甲)^2角^2\times氏^2\times心^2+原^2\times甲^2\times亢^2\times房^2=0$

環円が６個のとき，甲=庚とする．

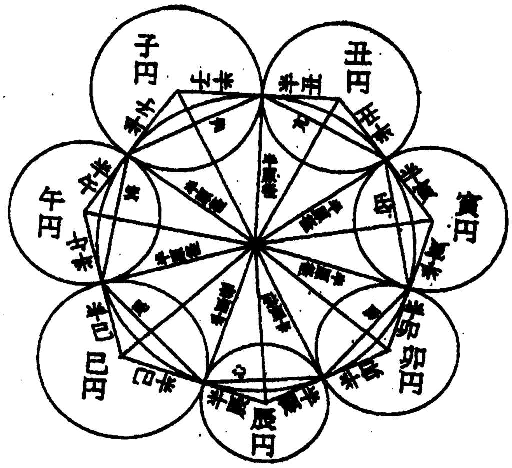
環六円矩合　$-亢^2\times房^2\times尾^2+角^2\times氏^2\times心^2=0$

環円が７個のとき，甲=辛とする．

環七円矩合　$-(原+甲)^2角^2\times氏^2\times心^2\times箕^2+原^2\times甲^2\times亢^2\times房^2\times箕^2=0$

4　第三解

角，亢，氏，... を弦とし，原円の半径と
その弦の両端で接する子円，丑円，寅円，... を考える．
子円，丑円，寅円，... の直径と弦角，亢，氏，... の関係



$$角^2=\frac{子^2\times原^2}{子^2+原^2}\qquad 亢^2=\frac{丑^2\times原^2}{丑^2+原^2}\qquad 氏^2=\frac{寅^2\times原^2}{寅^2+原^2}$$

$$房^2=\frac{卯^2\times原^2}{卯^2+原^2}\qquad 心^2=\frac{辰^2\times原^2}{辰^2+原^2}\qquad 尾^2=\frac{巳^2\times原^2}{巳^2+原^2}$$

$$箕^2=\frac{午^2\times原^2}{午^2+原^2}$$

懐円矩合　多角形に円が内接しているとき，各頂点から円の接点までの長さの2倍を支線と呼ぶ．支線が与えられたときに内接円（懐円）の直径を求める式が懐円矩合である．本文には「懐円矩合、乃解別記載之故不贅之」とある．安島がどこに記載したかは不明であるが，有馬頼徸『拾璣算法』第四巻作式第二問に奇数多角形の場合に各辺の長さから内接円の直径を求める問題が載せられている．奇数多角形の場合は各辺の長さが与えられれば、各支線の長さが求められるが，偶数多角形の場合は各辺の長さから各支線の長さは求められない．偶数多角形の場合ははじめに支線の長さが与えられれば内接円の直径を求めることができる．『拾璣算法』には術文の最後に「偶斜懐円者不拘各斜支線之長短随意無窮容円径亦自生変態也故如奇斜術以圓斜不能求毎斜之支線故定无術焉尚其詳解期追刻矣　若題辭各支線云問円径者必有術」とある．

三斜　$(\text{支三和})\,\text{原}^2 - (\text{三支相乗一位}) = 0$

$(\text{子} + \text{丑} + \text{寅})\,\text{原}^2 - \text{子} \times \text{丑} \times \text{寅} = 0$

四斜　$(\text{支四和})\,\text{原}^2 - (\text{三支相乗四和}) = 0$

$(\text{子} + \text{丑} + \text{寅} + \text{卯})\,\text{原}^2 - (\text{子} \times \text{丑} \times \text{寅} + \text{子} \times \text{丑} \times \text{卯} + \text{子} \times \text{寅} \times \text{卯} + \text{丑} \times \text{寅} \times \text{卯}) = 0$

五斜　$-(\text{支五和})\,\text{原}^4 + (\text{三支相乗十和})\,\text{原}^2 - (\text{五支相乗一位}) = 0$

$-(\text{子} + \text{丑} + \text{寅} + \text{卯} + \text{辰})\,\text{原}^4 + (\text{子} \times \text{丑} \times \text{寅} + \text{子} \times \text{丑} \times \text{卯} + \text{子} \times \text{丑} \times \text{辰} + \text{子} \times \text{寅} \times \text{卯} + \text{子} \times \text{寅} \times \text{辰}$

$+\text{子} \times \text{卯} \times \text{辰} + \text{丑} \times \text{寅} \times \text{卯} + \text{丑} \times \text{寅} \times \text{辰} + \text{丑} \times \text{卯} \times \text{辰} + \text{寅} \times \text{卯} \times \text{辰})\,\text{原}^2 - \text{子} \times \text{丑} \times \text{寅} \times \text{卯} \times \text{辰} = 0$

六斜　$-(\text{支六和})\,\text{原}^4 + (\text{三支相乗二十和})\,\text{原}^2 - (\text{五支相乗六和}) = 0$

七斜　$(\text{支七和})\,\text{原}^6 - (\text{三支相乗三十五和})\,\text{原}^4 + (\text{五支相乗二十一和})\,\text{原}^2 - (\text{七支相乗一位}) = 0$

八斜　$(\text{支八和})\,\text{原}^6 - (\text{三支相乗五十六和})\,\text{原}^4 + (\text{五支相乗五十六和})\,\text{原}^2 - (\text{七支相乗八和}) = 0$

九斜　$-(\text{支九和})\,\text{原}^8 + (\text{三支相乗八十四和})\,\text{原}^6 - (\text{五支相乗百二十六和})\,\text{原}^4$

$+(\text{七支相乗三十六和})\,\text{原}^2 - (\text{九支相乗一位}) = 0$

十斜　$-(\text{支十和})\,\text{原}^8 + (\text{三支相乗百二十和})\,\text{原}^6 - (\text{五支相乗二百五十二和})\,\text{原}^4$

$+(\text{七支相乗百二十和})\,\text{原}^2 - (\text{九支相乗十和}) = 0$

支線を求める式

三斜　$(\text{支二和})\,\text{原}^2 + \{\text{原}^2 - (\text{二支相乗一位})\}\,\text{寅} = 0$　実級正

$(\text{子} + \text{丑})\,\text{原}^2 + (\text{原}^2 - \text{子} \times \text{丑})\,\text{寅} = 0$

四斜　$(\text{支三和})\,\text{原}^2 - (\text{三支相乗一位}) + \{\text{原}^2 - (\text{二支相乗三和})\}\,\text{卯} = 0$　実級正

$(\text{子} + \text{丑} + \text{寅})\,\text{原}^2 - \text{子} \times \text{丑} \times \text{寅} + \{\text{原}^2 - (\text{子} \times \text{丑} + \text{子} \times \text{寅} + \text{丑} \times \text{寅})\}\,\text{卯} = 0$

五斜　$-(\text{支四和})\,\text{原}^4 + (\text{三支相乗四和})\,\text{原}^2 + \{-\text{原}^4 + (\text{二支相乗六和})\,\text{原}^2 - (\text{四支相乗一位})\}\,\text{辰} = 0$　実級負

$$-(\text{子}+\text{丑}+\text{寅}+\text{卯})\,\text{原}^4+(\text{子}\times\text{丑}\times\text{寅}+\text{子}\times\text{丑}\times\text{卯}+\text{子}\times\text{寅}\times\text{卯}+\text{丑}\times\text{寅}\times\text{卯})\,\text{原}^2$$

$$+\{-\text{原}^4+(\text{子}\times\text{丑}+\text{子}\times\text{寅}+\text{子}\times\text{卯}+\text{丑}\times\text{寅}+\text{丑}\times\text{卯}+\text{寅}\times\text{卯})\,\text{原}^2+\text{子}\times\text{丑}\times\text{寅}\times\text{卯}\}\,\text{辰}=0$$

六斜 $-(\text{支五和})\,\text{原}^4+(\text{三支相乗十和})\,\text{原}^2-(\text{五支相乗一位})$

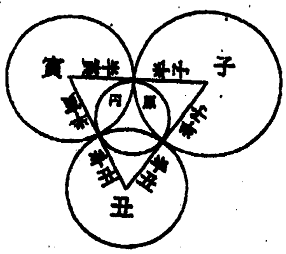
$$+\{-\text{原}^4+(\text{二支相乗十和})\,\text{原}^2-(\text{四支相乗五和})\}\,\text{巳}=0 \quad \text{実級負}$$

以下一十一斜まで載せているが省略する.

5 第四解，円環奇数

円の数が奇数の場合

環三円 原円の直径，および子，丑円の直径が与えられたとき，角斜 ^{2}，亢斜 ^{2} から氐斜 ^{2} を求め環三円矩合より，甲の直径を求める．



前節の三斜の支線を求める式より

$$\text{実級（定数項）}=(\text{支二和})\,\text{原}^2=(\text{子}+\text{丑})\,\text{原}^2$$

方級（寅の係数），符号を逆にする

$$(\text{二支相乗一位})-\text{原}^2=\text{子}\times\text{丑}-\text{原}^2=\text{乾}$$

$$\text{実級}=\text{乾}\times\text{寅}$$

$$\text{寅}=\frac{\text{実級}}{\text{乾}} \quad \text{より}$$

$$\text{氐}=\frac{\text{寅}^2\times\text{原}^2}{\text{寅}^2+\text{原}^2}$$

に代入して，氐 ^{2} を求め環三円矩合

$$-(\text{原}+\text{甲})^2\text{角}^2\times\text{氐}^2+\text{原}^2\times\text{甲}^2\times\text{亢}^2=0$$

により甲円の直径を求めている．本文では，巧みに計算している．

乾 $^2\times$ 原 $^2+$ 実級 ^{2} これは氐 ^{2} の分母の部分である

$$(\text{子}+\text{丑})^2\text{原}^4+\text{乾}^2\times\text{原}^2=(\text{寅}^2+\text{原}^2)\,\text{乾}^2$$

$$\text{子}^2\times\text{原}^4+2\,\text{子}\times\text{丑}\times\text{原}^4+\text{丑}^2\times\text{原}^4+\text{子}^2\times\text{丑}^2\times\text{原}^2-2\,\text{子}\times\text{丑}\times\text{原}^4-\text{原}^6$$

$$(\text{子}^2+\text{原}^2)(\text{丑}^2+\text{原}^2)\,\text{原}^2=\text{東}$$

$$(\text{子}+\text{丑})^2\text{原}^2+\text{乾}^2=(\text{子}^2+\text{原}^2)(\text{丑}^2+\text{原}^2)$$

(実級) $^2\times$ 原 ^{2} これは氐 ^{2} の分子の部分である

$$\frac{\text{実級}^2\times\text{原}^2}{\text{東}}=\text{氐}^2=\frac{(\text{支二和})^2\text{原}^4}{(\text{子}^2+\text{原}^2)(\text{丑}^2+\text{原}^2)}$$

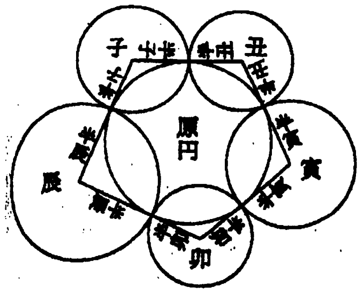
環三円矩合により

$$角 = \frac{子^2 \times 原^2}{子^2 + 原^2} \qquad 亢 = \frac{丑^2 \times 原^2}{丑^2 + 原^2}$$

$$原^2 \times 甲^2 \times 亢^2 = \frac{甲^2 \times 丑^2 \times 原^2}{丑^2 + 原^2} = 寄左$$

$$(原 + 甲)^2 角^2 \times 氐^2 = \frac{(原 + 甲)^2 子^2 (支二和)^2 原^6}{(丑^2 + 原^2)(子^2 + 原^2)^2}$$

(寄左) − (上式) = 0



$$-\frac{(原 + 甲)^2 子^2 (支二和)^2 原^6}{(丑^2 + 原^2)(子^2 + 原^2)^2} + \frac{甲^2 \times 丑^2 \times 原^4}{(丑^2 + 原^2)^2} = 0$$

$$-(原 + 甲)\ 子\ (支二和)\ 原 + 甲 \times 丑\ (子^2 + 原^2) = 0$$

甲円の直径を得る式

$$-原^2 (支二和)\ 子 + \{-原\ (支二和)\ 子 + (子^2 + 原^2)\ 丑\}\ 甲 = 0$$

環五円　原円の直径，および子，丑，寅，卯円の直径が与えられたとき，角斜^2，亢斜^2，氐斜^2，房斜^{2}より心斜^{2}を求め環五円矩合により，甲の直径を求める．前節の五斜の支線を求める式より実級（定数項）の符号を逆にする．

$$(支四和)\ 原^4 - (三支相乗四和)\ 原^2$$

$$(支四和)\ 原^2 - (三支相乗四和) = 東$$

$$実級 = 東 \times 原^2 = (子 + 丑)\ 原^2 + (寅 + 卯)\ 原^2 - (子 + 丑)\ 寅 \times 卯 - (寅 + 卯)\ 子 \times 丑$$

$$-子 \times 丑 + 原^2 = 乾 \qquad -寅 \times 卯 + 原^2 = 兌$$

$$実級 = 乾\ (寅 + 卯)\ 原^2 + 兌\ (子 + 丑)\ 原^2 = 方級 \times 辰$$

$$方級 = -(四支相乗一位) + (二支相乗六和)\ 原^2 - 原^4$$

$$-子 \times 丑 \times 寅 \times 卯 + 子 \times 丑 \times 原^2 + 寅 \times 卯 \times 原^2 + (子 + 丑)(寅 + 卯)\ 原^2 - 原^4$$

$$= (子 + 丑)(寅 + 卯)\ 原^2 - 乾 \times 兌$$

$(方級)^2 \times 原^2 + (実級)^2$　心^{2}の分母の部分である

$$乾^2 (寅 + 卯)^2 原^4 + 2\ 乾 \times 兌\ (子 + 丑)(寅 + 卯)\ 原^4 + 兌^2 (子 + 丑)^2 原^4 + (子 + 丑)^2 (寅 + 卯)^2 原^6$$

$$-2\ 乾 \times 兌\ (子 + 丑)(寅 + 卯)\ 原^4 + 乾^2 \times 兌^2 \times 原^2 = 天 \times 地 \times 原^2$$

$$(子 + 丑)^2 原^2 + 乾^2 = 天 \qquad (寅 + 卯)^2 原^2 + 兌^2 = 地$$

$$天 = (子^2 + 原^2)(丑^2 + 原^2) \qquad 地 = (寅^2 + 原^2)(卯^2 + 原^2)$$

$$天 \times 地 \times 原^2 = (子^2 + 原^2)(丑^2 + 原^2)(寅^2 + 原^2)(卯^2 + 原^2)\ 原^2 = 西 = (方級)^2(辰^2 + 原^2)$$

$$\frac{(実級)^2 \times 原^2}{西} = \frac{東^2 \times 原^4}{(卯^2 + 原^2)(寅^2 + 原^2)(丑^2 + 原^2)(子^2 + 原^2)} = 心^2$$

環五円矩合

$$-(原 + 甲)^2 角^2 \times 氐^2 \times 心^2 + 原^2 \times 甲^2 \times 亢^2 \times 房^2 = 0$$

によって

$$原^2 \times 甲^2 \times 亢^2 \times 房^2 = \frac{甲^2 \times 丑^2 \times 卯^2 \times 原^6}{(卯^2 + 原^2)(丑^2 + 原^2)}$$

$$(原 + 甲)^2 角^2 \times 氐^2 \times 心^2 = \frac{(原 + 甲)^2 \times 東^2 \times 子^2 \times 寅^2 \times 原^8}{(卯^2 + 原^2)(寅^2 + 原^2)^2(丑^2 + 原^2)(子^2 + 原^2)^2}$$

$$-(原 + 甲)\ 東 \times 子 \times 寅 \times 原 + 甲 \times 丑 \times 卯\ (子^2 + 原^2)(寅^2 + 原^2) = 0$$

甲円の直径を得る式

$$-(支四和)\ 原^4 \times 子 \times 寅 + (三支相乗四和)\ 原^2 \times 子 \times 寅 + \{-(支四和)\ 原^3 \times 子 \times 寅$$

$$+(三支相乗四和)\ 原 \times 子 \times 寅 + (子^2 + 原^2)(寅^2 + 原^2)\ 丑 \times 卯\}\ 甲 = 0$$

甲円の直径を得る式　環七円の場合の計算を載せた後，環三円から環一十一円まで甲円の直径を得る式を載せている．

環三円

$$-(支二和)\ 原^2 \times 子 + \{-(支二和)\ 原 \times 子 + (子^2 + 原^2)\ 丑\}\ 甲 = 0$$

環五円

$$-(支四和)\ 原^4 \times 子 \times 寅 + (三支相乗四和)\ 原^2 \times 子 \times 寅$$

$$+\{-(支四和)\ 原^3 \times 子 \times 寅 + (三支相乗四和)\ 原 \times 子 \times 寅 - (子^2 + 原^2)(寅^2 + 原^2)\ 丑 \times 卯\}\ 甲 = 0$$

環七円

$$-(支六和)\ 原^6 \times 子 \times 寅 \times 辰 + (三支相乗二十和)\ 原^4 \times 子 \times 寅 \times 辰$$

$$-(五支相乗六和)\ 原^2 \times 子 \times 寅 \times 辰 + \{-(支六和)\ 原^4 \times 子 \times 寅 \times 辰$$

$$+(三支相乗二十和)\ 原^3 \times 子 \times 寅 \times 辰 - (五支相乗六和)\ 原 \times 子 \times 寅 \times 辰$$

$$(子^2 + 原^2)(寅^2 + 原^2)(辰^2 + 原^2)\ 丑 \times 卯 \times 巳\}\ 甲 = 0$$

環九円

$$-(支八和)\ 原^8 \times 子 \times 寅 \times 辰 \times 午 + (三支相乗五十六和)\ 原^6 \times 子 \times 寅 \times 辰 \times 午$$

$-$(五支相乗五十六和) 原^4 × 子 × 寅 × 辰 × 午 + (七支相乗八和) 原^2 × 子 × 寅 × 辰 × 午

+{$-$(支八和) 原^7 × 子 × 寅 × 辰 × 午 + (三支相乗五十六和) 原^5 × 子 × 寅 × 辰 × 午

$-$(五支相乗五十六和) 原^3 × 子 × 寅 × 辰 × 午 + (七支相乗八和) 原 × 子 × 寅 × 辰 × 午

$-$(子^2 + 原^2)(寅^2 + 原^2)(辰^2 + 原^2)(午^2 + 原^2) 丑 × 卯 × 巳 × 未 } 甲 = 0

環一十一円

$-$(支十和) 原^{10} × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 + (三支相乗百二十和) 原^8 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申

$-$(五支相乗二百五十二和) 原^6 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 + (七支相乗百二十和) 原^4 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申

$-$(九支相乗十和) 原^2 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 + {$-$(支十和) 原^9 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申

+(三支相乗百二十和) 原^7 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 $-$ (五支相乗二百五十二和) 原^5 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申

+(七支相乗百二十和) 原^3 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 $-$ (九支相乗十和) 原 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申

+(子^2 + 原^2)(寅^2 + 原^2)(辰^2 + 原^2)(午^2 + 原^2)(申^2 + 原^2) 丑 × 卯 × 巳 × 未 × 酉 } 甲 = 0

環一十三円

$-$(支十二和) 原^{12} × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 × 戌

+(三支相乗二百二十和) 原^{10} × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 × 戌

$-$(五支相乗七百九十二和) 原^8 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 × 戌

+(七支相乗七百九十二和) 原^6 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 × 戌

$-$(九支相乗二百二十和) 原^4 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 × 戌

+(十一支十二和) 原^2 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 × 戌

+{$-$(支十二和) 原^{11} × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 × 戌

+(三支相乗二百二十和) 原^9 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 × 戌

$-$(五支相乗七百九十二和) 原^7 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 × 戌

+(七支相乗七百九十二和) 原^5 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 × 戌

$-$(九支相乗二百二十和) 原^3 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 × 戌

+(十一支相乗十二和) 原 × 子 × 寅 × 辰 × 午 × 申 × 戌

$-$(子^2 + 原^2)(寅^2 + 原^2)(辰^2 + 原^2)(午^2 + 原^2)(申^2 + 原^2)(戌^2 + 原^2) 丑 × 卯 × 巳 × 未 × 酉 × 亥 } 甲 = 0

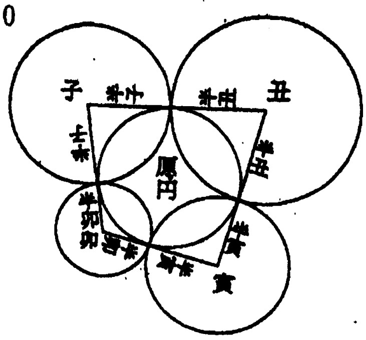
6 第五解，環円偶数

円の数が偶数場合

環四円 環円矩合より

$$-亢^2 \times 房^2 + 角^2 \times 氐^2 = 0$$

原円の直径，子，丑円の直径が与えられたとき，寅を求める．卯は一意的に決まり，甲円は決まらない．
四斜の支線を求める式により



$$実級 = -(三支相乗一位) + (支三和)\ 原^2 = -子 \times 丑 \times 寅 + (子 + 丑 + 寅)\ 原^2 = 0$$

$$(二支相乗一位) - 原^2 = 仁 \qquad 子 \times 丑 - 原^2 = 乾$$

$$実級 = (支二和)\ 原^2 - 仁 \times 寅 = (子 + 丑)\ 原^2 - 乾 \times 寅 = 方級 \times 卯$$

$$方級 = (二支相乗三和) - 原^2 = (子 + 丑)\ 寅 + 子 \times 丑 - 原^2 = (子 \times 丑)\ 寅 + 乾$$

$$\{(子 \times 丑)\ 寅 + 乾\}^2 \times 原^2 + (実級)^2$$

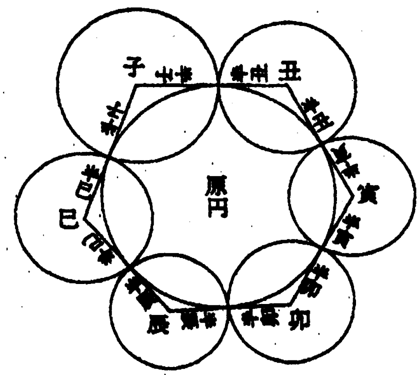
$$= (子 + 丑)\ 原^4 - 2\ 乾\ (子 + 丑)\ 寅 \times 原^2 + 乾^2 \times 寅^2 + (子 + 丑)^2 寅^2 \times 原^2$$

$$+2\ 乾\ (子 + 丑)\ 寅 \times 原^2 + 乾^2 \times 原^2 = 天\ (寅^2 + 原^2)$$

$$(子 + 丑)^2 原^2 + 乾^2 = 天 \qquad 天 = (子^2 + 原^2)(丑^2 + 原^2)$$

$$天\ (寅^2 + 原^2) = (子^2 + 原^2)(丑^2 + 原^2)(寅^2 + 原^2) = 義 = (方級)^2 (卯^2 + 原^2)$$

$$\frac{(実級)^2 \times 原^2}{義} = \frac{(実級)^2 \times 原^2}{(寅^2 + 原^2)(丑^2 + 原^2)(子^2 + 原^2)} = 房^2$$



$亢^2$ を掛ける

$$\frac{(実級)^2 \times 丑^2 \times 原^4}{(寅^2 + 原^2)(丑^2 + 原^2)^2(子^2 + 原^2)} = 寄左$$

$$角^2 \times 氐^2 = \frac{子^2 \times 寅^2 \times 原^2}{(寅^2 + 原^2)(子^2 + 原^2)}$$

$$(上式) - (寄左) = 0$$

$$-(実級) \times 丑 + (丑^2 + 原^2)\ 子 \times 寅 = -(支二和)\ 原^2 \times 丑 + 仁 \times 丑 \times 寅 + (丑^2 + 原^2)\ 子 \times 寅 = 0$$

寅を得る式

$$-(支二和)\ 原^2 \times 丑 + \{-原^2 \times 丑 + (二支相乗一位)\ 丑 + (丑^2 + 原^2)\ 子\}\ 寅 = 0$$

環六円　環円矩合より

$$-亢^2 \times 房^2 \times 尾^2 + 角^2 \times 氐^2 \times 心^2 = 0$$

原円の直径，子，丑，寅，卯円の直径が与えられたとき，辰を求める．巳は一意的に決まり，甲円は決まらない．六斜の支線を求める式により，実級の符号を逆にする．

$$実級 = (五支相乗一位) - (三支相乗十和)\,原^2 + (支五和)\,原^4$$

$$-(四支相乗一位) + (二支相乗六和)\,原^2 - 原^4 = 礼$$

$$実級 = -(三支相乗四和)\,原^2 + (支四和)\,原^4 - 礼 \times 辰$$

$$= -(子+丑)\,寅 \times 卯 \times 原^2 - (寅+卯)\,子 \times 丑 \times 原^2 + (子+丑)\,原^4 + (寅+卯)\,原^4 - 礼 \times 辰$$

五斜求支線式の方級と同じである．環五円術より

$$-子 \times 丑 + 原^2 = 乾 \qquad -寅 \times 卯 + 原^2 = 兌$$

$$乾\,(寅+卯)\,原^2 + 兌\,(子+丑)\,原^2 - (子+丑)(寅+卯)\,辰 \times 原^2 + 乾 \times 兌 \times 辰 = 方級 \times 巳$$

$$方級 = -(四支相乗五和) + (二支相乗十和)\,原^2 - 原^4$$

$$= -(子+丑)\,寅 \times 卯 \times 辰 - (寅+卯)\,子 \times 丑 \times 辰 + (子+丑)\,辰 \times 原^2 + (寅+卯)\,辰 \times 原^2 + 礼$$

$$= 乾\,(寅+卯)\,辰 + 兌\,(子+丑)\,辰 + (子+丑)(寅+卯)\,原^2 - 乾 \times 兌$$

$$(上式)^2 \times 原^2 + (実級)^2$$

$$= 乾^2(寅+卯)^2原^4 + 兌^2(子+丑)^2原^4 + (子+丑)^2(寅+卯)^2辰^2 \times 原^4 + 乾^2 \times 兌^2 \times 辰^2$$

$$+兌^2(子+丑)^2辰^2 \times 原^2 + 乾^2(寅+卯)\,辰^2 \times 原^2 + (子+丑)^2(寅+卯)^2原^6 + 乾^2 \times 兌^2 \times 原^2$$

$$(子+丑)^2原^2 + 乾^2 = 天 \qquad (寅+卯)^2原^2 + 兌^2 = 地$$

$$(上式) = 天 \times 地\,(辰^2 + 原^2) \qquad 天 = (子^2 + 原^2)(丑^2 + 原^2) \qquad 地 = (寅^2 + 原^2)(卯^2 + 原^2)$$

$$天 \times 地\,(辰^2 + 原^2) = (子^2 + 原^2)(丑^2 + 原^2)(寅^2 + 原^2)(卯^2 + 原^2)(辰^2 + 原^2) = 智 = (方級)^2(巳^2 + 原^2)$$

$$\frac{(実級)^2 \times 原^2}{智} = \frac{(実級)^2 \times 原^2}{(辰^2 + 原^2)(卯^2 + 原^2)(寅^2 + 原^2)(丑^2 + 原^2)(子^2 + 原^2)} = 尾^2$$

$$亢^2 \times 房^2 \times 尾^2 = \frac{(実級)^2 \times 丑^2 \times 卯^2 \times 原^6}{(辰^2 + 原^2)(卯^2 + 原^2)^2(寅^2 + 原^2)(丑^2 + 原^2)^2(子^2 + 原^2)} = 寄左$$

$$角^2 \times 氐^2 \times 心^2 = \frac{子^2 \times 寅 \times 辰^2 \times 原^6}{(辰^2 + 原^2)(寅^2 + 原^2)(子^2 + 原^2)}$$

$$(上式) - (寄左) = 0$$

$$-(実級) \times 丑 \times 卯 + (丑^2 + 原^2)(卯^2 + 原^2)\,子 \times 寅 \times 辰 = 0$$

$(\text{三支相乗四和}) \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{原}^2 - (\text{支四和})\ \text{丑} \times \text{卯} \times \text{原}^4 + \text{礼} \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{辰}$

$+(\text{丑}^2 + \text{原}^2)(\text{卯}^2 + \text{原}^2)\ \text{子} \times \text{寅} \times \text{辰} = 0$

辰を得る式

$-(\text{支四和})\ \text{原}^4 \times \text{丑} \times \text{卯} + (\text{三支相乗四和})\ \text{原}^2 \times \text{丑} \times \text{卯} + \{-(\text{原}^4 \times \text{丑} \times \text{卯}$

$+(\text{二支相乗六和})\ \text{原}^2 \times \text{丑} \times \text{卯} - (\text{四支相乗一位})\ \text{丑} \times \text{卯} + (\text{丑}^2 + \text{原}^2)(\text{卯}^2 + \text{原}^2)\ \text{子} \times \text{寅}\}\ \text{辰} = 0$

環四円寅を得る式

$-(\text{支二和})\ \text{原}^2 \times \text{丑} + \{-\text{原}^2 \times \text{丑} + (\text{二支相乗一位})\ \text{丑} + (\text{丑}^2 + \text{原}^2)\ \text{子}\}\ \text{寅} = 0$

環六円辰を得る式

$-(\text{支四和})\ \text{原}^4 \times \text{丑} \times \text{卯} + (\text{三支相乗四和})\ \text{原}^2 \times \text{丑} \times \text{卯} + \{-\text{原}^4 \times \text{丑} \times \text{卯} + (\text{二支相乗六和})\ \text{原}^2 \times \text{丑} \times \text{卯}$

$-(\text{四支相乗一位})\ \text{丑} \times \text{卯} + (\text{丑}^2 + \text{原}^2)(\text{卯}^2 + \text{原}^2)\ \text{子} \times \text{寅}\}\ \text{辰} = 0$

環八円午を得る式

$-(\text{支六和})\ \text{原}^6 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} + (\text{三支相乗二十和})\ \text{原}^4 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} - (\text{五支相乗六和})\ \text{原}^2 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳}$

$+\{-\text{原}^6 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} + (\text{二支相乗十五和})\ \text{原}^4 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} - (\text{四支相乗十五和})\ \text{原}^2 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳}$

$+(\text{六支相乗一位})\ \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} + (\text{丑}^2 + \text{原}^2)(\text{卯}^2 + \text{原}^2)(\text{巳}^2 + \text{原}^2)\ \text{子} \times \text{寅} \times \text{辰}\}\ \text{午} = 0$

環十円申を得る式

$-(\text{支八和})\ \text{原}^8 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未} + (\text{三支相乗五十六和})\ \text{原}^6 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未}$

$-(\text{五支相乗五十六和})\ \text{原}^4 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未} + (\text{七支相乗八和})\ \text{原}^2 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未}$

$+\{-\text{原}^8 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未} + (\text{二支相乗二十八和})\ \text{原}^6 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未}$

$-(\text{四支相乗七〇和})\ \text{原}^2 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未} + (\text{六支相乗二十八和})\ \text{原}^2 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未}$

$-(\text{八支相乗一位})\ \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未} + (\text{丑}^2 + \text{原}^2)(\text{卯}^2 + \text{原}^2)(\text{巳}^2 + \text{原}^2)(\text{未}^2 + \text{原}^2)\ \text{子} \times \text{寅} \times \text{辰} \times \text{午}\}\ \text{申} = 0$

環十二円戌を得る式

$-(\text{支十和})\ \text{原}^{10} \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未} \times \text{酉} + (\text{三支相乗百二十和})\ \text{原}^8 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未} \times \text{酉}$

$-(\text{五支相乗二百五十二和})\ \text{原}^6 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未} \times \text{酉} + (\text{七支相乗百二十})\ \text{原}^4 \times \text{丑} \times \text{巳} \times \text{未} \times \text{酉}$

$-(\text{九支相乗十和})\ \text{原}^2 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未} \times \text{酉} + \{-\text{原}^{10} \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未} \times \text{酉}$

$+(\text{二支相乗四十五和})\ \text{原}^8 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未} \times \text{酉} - (\text{四支相乗二百十和})\ \text{原}^6 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未} \times \text{酉}$

$+(\text{六支相乗二百十和})\ \text{原}^4 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未} \times \text{酉} - (\text{八支相乗四十五和})\ \text{原}^2 \times \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未} \times \text{酉}$

$+(\text{十支相乗一位})\ \text{丑} \times \text{卯} \times \text{巳} \times \text{未} \times \text{酉}$

$+(\text{丑}^2 + \text{原}^2)(\text{卯}^2 + \text{原}^2)(\text{巳}^2 + \text{原}^2)(\text{未}^2 + \text{原}^2)(\text{酉}^2 + \text{原}^2)\ \text{子} \times \text{寅} \times \text{辰} \times \text{午} \times \text{申}\}\ \text{戌} = 0$

7　第六解，求各円径

環円において原円，甲円，$\cdots$ の直径が与えられたとき乙円，丙円，$\cdots$ の直径を求める．

環円数奇数

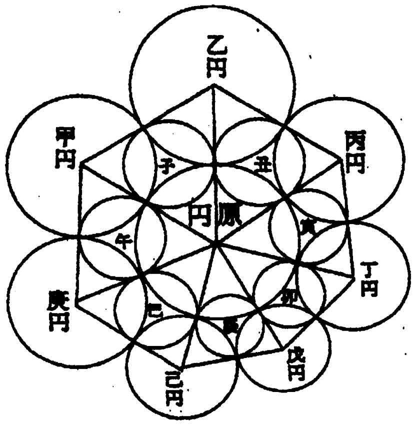
円が 3 個のとき，原円と子，丑円の直径を任意に与えられたとき甲円の直径を求める．
円が 5 個のとき，原円と子，丑，寅，卯円の直径を任意に与えられたとき甲円の直径を求める．
円が 7 個のとき，原円と子，丑，寅，卯，辰，巳円の直径を任意に与えられたとき甲円の直径を求める．
各甲円の直径を求める式は第四解を参照

環円数偶数

円が 4 個のとき，原円と子，丑円の直径を任意に与えられたとき寅円の直径を求める．
円が 6 個のとき，原円と子，丑，寅，卯円の直径を任意に与えられたとき辰円の直径を求める．
円が 8 個のとき，原円と子，丑，寅，卯，辰，巳円の直径を任意に与えられたとき午円の直径を求める．
各支線の長さを求める式は第五解を参照

$$乙=\frac{(甲+原)子^2}{甲\times原-子^2}\qquad 丙=\frac{(乙+原)丑^2}{乙\times原-丑^2}\qquad 丁=\frac{(丙+原)寅^2}{丙\times原-寅^2}$$

$$戊=\frac{(丁+原)卯^2}{丁\times原-卯^2}\qquad 己=\frac{(戊+原)辰^2}{戊\times原-辰^2}$$



8　第七解，求内環円径

第二解で求めた、環三円空数により

$$-(原+甲)角\times氏+原\times甲\times亢=0$$

外接する甲円の直径を得る式

$$-原\times角\times氏+(-角\times氏+原\times亢)甲=0$$

$$\frac{方級}{実級}=-\frac{1}{原}+\frac{亢}{角\times氏}=\frac{1}{外甲}=寄位$$

外甲は正である．図のように原円に内接するとき，内甲は負である

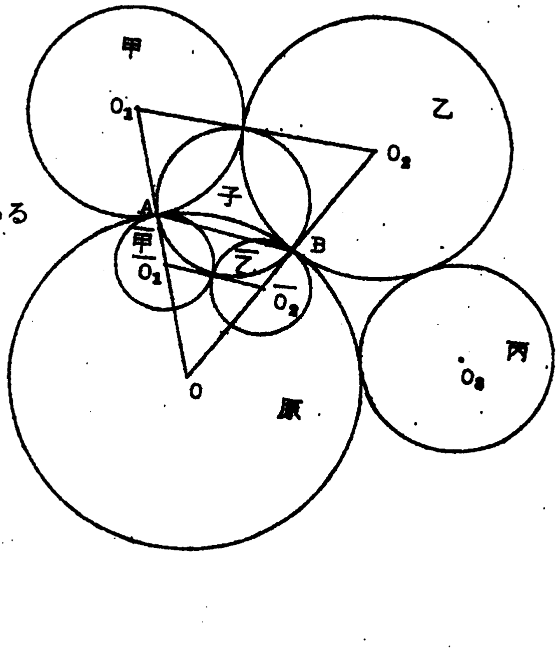
$$-(原-甲)^2角^2\times氏^2+原^2\times甲^2\times亢^2=0$$

$$-(原-甲)角\times氏+原\times甲\times亢=0$$

内甲円の直径を得る式

$$-原\times角\times氏+(角\times氏+原\times亢)内甲=0$$

$$\frac{方級}{実級}=\frac{1}{原}+\frac{亢}{氏\times角}=\frac{1}{内甲}$$



$$\frac{2}{原} = -\frac{1}{外甲} + \frac{1}{内甲}$$

$$2\,外甲 \times 内甲 = -原 \times 内甲 + 原 \times 外甲$$

外甲円の直径が与えられたとき内甲円の直径を得る式

$$-外甲 \times 原 + (原 + 2\,外甲)\,内甲 = 0$$

$$内乙円 = \frac{(原 - 内甲)\,子^2}{原 \times 内甲 + 子^2}$$

これは先に載せられている

$$外乙円 = \frac{(原 + 外甲)\,子^2}{原 \times 外甲 - 子^2}$$

において，外甲を $-$内甲 に，外乙を $-$内乙 に置き換えたものである．

9 追考

環円の数が 3 個のとき，原円，甲円，子円の直径を任意に与えられたとき丑円の直径を得る式

$$-子^2 \times 原 \times (原 + 甲) + \{-子 \times 原 \times (原 + 甲) + (子^2 + 原^2)\,甲\}\,丑 = 0$$

環円の数が 5 個のとき，原円，甲円，子，丑，寅円の直径を任意に与えられたとき卯円の直径を得る式

$$(支三和)\,原^2 - (三支相乗一位) = 東 \qquad -原^2 + (二支相乗三和) = 冬$$

$$-東 \times 原\,(原 + 甲)\,子 \times 寅 + \{\,冬 \times 原\,(原 + 甲)\,子 \times 寅 + (子^2 + 原^2)(寅^2 + 原^2)\,甲 \times 丑\,\}\,卯 = 0$$

参考文献

[1] 平山諦・松岡元久編『安島直円全集』富士短期大学出版部　昭和 41 年

[2] 加藤平左エ門著『安島直円の業績』名城大学理工学部数学教室　昭和 46 年

[3] 米光丁・藤井康生著『拾璣算法』平成 11 年